WŁAŚCIWOŚCI DYFUZYJNE

Podstawy

Marek Markowski

Katedra Inżynierii Systemów, UWM w Olsztynie

21 kwietnia 2013

Równanie dyfuzji wody w ciele stałym:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = div\left(D \cdot grad\left(C\right)\right) \tag{1}$$

gdzie:

C – stężenie wody (kg H_2O/m^3)

D – współczynnik dyfuzji wody (m^2/s)

t – czas suszenia (s).

Stężenie wody można wyrazić poprzez zawartość wody, *u*, i gęstość suchej substancji, ρ_s:

$$C = \frac{m_w}{V} = \frac{m_w}{m_s} \cdot \frac{m_s}{V} = u \cdot \rho_s \tag{2}$$

czyli

$$C = u \cdot \rho_s \tag{3}$$

W przypadku braku skurczu suszarniczego gęstość suchej substancji jest stała:

$$\rho_s = const \tag{4}$$

Zatem, równanie dyfuzji wody dla ciała o kształcie kuli jest opisane zależnością:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(D \cdot grad\left(u\right)\right) \tag{5}$$

W równaniu tym przyjęto pewne założenia upraszczające m.in. stałość współczynnika dyfuzji wody oraz niezmienność kształtu i wymiarów geometrycznych. Uśrednione po objętości kuli rozwiązanie równania (5) przy przyjętych warunkach początkowych i brzegowych (6) i (7):

$$u(t=0,x,y,z)=u_0, \tag{6}$$

$$t>0 \Rightarrow u(t,x,y,z)=u_r, \tag{7}$$

gdzie u_0, u_r – początkowa i równowagowa zawartość wody, jest opisane równaniem (8):

$$\frac{u(t)-u_r}{u_0-u_r}=\frac{6}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n^2\cdot\pi^2\cdot\frac{D\cdot t}{R_z^2}\right) \tag{8}$$

Podobne równania można otrzymać dla brył o kształcie nieskończonej płyty:

$$\frac{u(t)-u_r}{u_0-u_r}=\frac{8}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\exp\left(-(2n-1)^2\cdot\pi^2\cdot\frac{D\cdot t}{4h^2}\right) \tag{9}$$

i nieskończonego walca:

$$\frac{u(t)-u_r}{u_0-u_r}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mu_n^{\,2}}\exp\left(-\mu_n^{\,2}\cdot\frac{D\cdot t}{R_z^2}\right) \tag{10}$$

gdzie :

$$\mu_1=2.4048 \qquad \mu_2=5.5201 \qquad \mu_3=8.6537 \tag{11}$$

$$\mu_4=11.7915 \qquad \mu_5=14.4309 \qquad \text{dla n>5 jest} \quad \mu_{n+1}-\mu_n\approx\pi \tag{12}$$

Jeśli przyjąć, że pierwszy wyraz szeregu w równaniu (8) jest dużo większy od pozostałych wyrazów szeregu, to równanie (8) można uprościć do postaci:

$$\frac{u(t)-u_r}{u_0-u_r}\approx\frac{6}{\pi^2}\exp\left(-\pi^2\cdot\frac{D\cdot t}{R_z^2}\right) \tag{13}$$

lub do bardziej ogólnej postaci:

$$\frac{u(t)-u_r}{u_0-u_r}=a\cdot\exp\left(-\pi^2\cdot\frac{D\cdot t}{R_z^2}\right) \tag{14}$$

Zredukowana (bezwymiarowa) zawartość wody:

$$U(t) = \frac{u(t) - u_r}{u_0 - u_r} \tag{15}$$

Równanie (14) można przekształcić do postaci:

$$y = A - Bt \tag{16}$$

przy czym:

$$y = \ln(U) \qquad A = \ln(a) \qquad B = \frac{\pi^2 D}{R_z{}^2} \tag{17}$$

Z równania (8) współczynnik *D* można wyznaczyć metodą estymacji nieliniowej w oparciu o wyniki pomiarów. Podobnie można postąpić dla brył o kształcie płyty i walca.

Współczynnik dyfuzji, *D*, zależy od wilgotności, temperatury i mikrostruktury materiału, co obrazuje np. zależność (18):

$$D = D(u, T_m, \varepsilon) \tag{18}$$

gdzie ε oznacza porowatość materiału. Gdy zmiany wilgotności są niewielkie, to dla danego materiału o danej mikrostrukturze wyrażenie (18) można zapisać następująco:

$$D = D(T_m) \tag{19}$$

Gdy materiał szybko nagrzewa się do temperatury powietrza, to wyrażenie (19) sprowadza się do:

$$D = D(T_p) \tag{20}$$

Zależność współczynnika dyfuzji, *D*, od temperatury opisuje się zwykle równaniem Arrheniusa:

$$D = D_0 e^{-\frac{E_a}{RT}} \tag{21}$$

gdzie:

E_a – energia aktywacji (J/mol)

R – uniwersalna stała gazowa (*R* = 8,3144621(75) J/mol K)

T – temperatura bezwzględna (K)

D_0 –czynnik pre-ekspotencjalny (m^2/s)

Zależność współczynnika dyfuzji, D, od zawartości wody, u, i temperatury, T, materiału można zapisać w formie bardziej ogólnej:

$$D = D_0 e^{-\frac{E_a}{RT} + ku} \qquad (22)$$

gdzie: k – stała.

Stałe D_0, E_a i k w wyrażeniu (22) estymuje się w oparciu o zmierzone krzywe suszenia metodą regresji nieliniowej (metoda „zgrubna", gdzie u i T oznaczają wartości uśrednione po objętości bryły) lub metodą symulacji komputerowej, np. MES (metoda znacznie bardziej dokładna, gdzie u i T oznaczają wartości lokalne).